Attività 5

Botti di vino e fiocchi di neve. Un percorso storico didattico attraverso la matematica di Johannes Kepler

Per i docenti

In quest'ultima attività si prendono in considerazione le cinque cause che Kepler individua, verso la fine della sua *Strena*, per la forma esagonale dei fiocchi di neve e che – in termini moderni – possiamo così sintetizzare.

- **Prima causa:** l'esagono è la figura piana prescelta dalla natura per la sua particolare bellezza e adattabilità al coesistere di aria calda e aria fredda su una superficie piatta di vapore. Inoltre, è il primo poligono regolare a non essere faccia di un solido platonico (tetraedro, ottaedro, icosaedro, cubo e dodecaedro).
- **Seconda e terza causa:** con l'esagono si può ottenere una tassellazione regolare completa del piano; inoltre l'esagono è la figura dotata di tale proprietà che meglio approssima il cerchio.
- **Quarta causa:** la simmetria esagonale è una caratteristica tipica del mondo inanimato mentre la simmetria pentagonale è propria del mondo vegetale e animale.
- **Quinta causa:** la forma esagonale è l'espressione profonda e il riflesso intrinseco dell'anima creatrice che plasma la natura stessa.

Le cause prettamente "matematiche", pur non motivando esaurientemente la simmetria esagonale dei fiocchi di neve, offrono interessanti spunti per riflettere su questioni matematiche importanti (i solidi platonici, la tassellazione del piano, le forme geometriche in natura, …).

Alla fine dell'attività, gli studenti giungeranno a scoprire la vera "causa" della simmetria esagonale dei fiocchi di neve: tale forma, in realtà, è legata alla struttura atomica della materia (all'epoca di Kepler ancora del tutto sconosciuta, naturalmente!).

<u>Fasi dell'attività laboratoriale</u> (si possono sviluppare tutte in piccoli gruppi, utilizzando le schede di lavoro qui proposte)

1. Lavoro sul testo originale di Keplero, tramite una lettura guidata
2. Approfondimento sui poliedri regolari
3. Approfondimento sulla tassellazione del piano (occorre fornire a ciascun gruppo le seguenti <u>figure geometriche di cartoncino</u>: 10/12 triangoli equilateri congruenti; 10/12 quadrati congruenti; 10/12 pentagoni congruenti; 10/12 esagoni congruenti)
4. Approfondimento sulle forme esagonali e pentagonali in natura
5. Conclusioni: alla scoperta della "vera" causa della struttura esagonale dei fiocchi di neve (a piccoli gruppi o collettivamente, guidati dal docente). Eventualmente, si può prevedere un approfondimento da parte dei colleghi di <u>chimica/biologia</u>.

Lettura guidata del brano "Sulla forma dei fiocchi di neve"

Brano tratto da:
Johannes Kepler [1966], *The six-cornered snowflake*, transl. eng. by L. White, Oxford, Claredon Press, p. 39-41.
Disponibile online: http://www.joostwitte.nl/M_Galilei/Johannes_kepler_snowflake.pdf

Testo originale in latino

Denique serio de figura nivis stellata.

Dum enim ista scribo, rursum ninxit, et confertius, quam nuper. Contemplatus sum sedulo corpuscula nivis, cadebant igitur omnia radiosa, sed duorum generum: quaedam minuta valde, radiis circumcirca insitis, incerto numero, et simplicibus, sine villis, sine striis; erantque subtilissimi, in centro vero colligati ad grandiusculum globulum: atque horum erat maxima pars. Inter spargebantur autem secundi generis rariores sexangulae stellulae earumque nulla aliter nisi plana neque volitabat neque cadebat, villis etiam in eandem planitiem cum caule suo compositis. Vergebat autem inferius deorsum radiolus septimus, quasi radix aliqua, in quam cadentes incumbebant, eaque sustinebantur sublimes aliquandiu: quod me supra non fugit, sed sinistre exceptum est, ac si terni diametri non essent in eodem plano. Itaque non minus quod hactenus dixi, quam de quo dixi,[42] *a Nihilo quam proxime abest.*

Primum genus grumosum, puto esse ex vapore iam paene deserto a calore, et iam iam in guttas aqueas condensando. Itaque et rotunda sunt, et figuram pulchram non sortiuntur, deserta iam ab architecto, et radiosa sunt undique, iis principiis, quae supra ad contemplationem pruinosae consistentiae in fenestris sunt adhibita.

In secundo vero genere, quod est stellularum, locum nullum habet contemplatio cubi vel octahedri, neque ullus guttarum contactus: cum
plana

plana incidant, non ut supra sum opinatus, decussata trinis diametris.

Etsi igitur formatrix anima hic quoque locum suum tuetur, manetque in causa:[27] *de electione tamen figurae quaestio est redintegranda. Primum cur plana? An quia non recte supra ademi planas formatricibus corporum? Nam in omnibus floribus inest quinquangulum planum: non dodecahedrum solidum. Tunc causa planae figurae vere haec esset: quod frigus calidum vaporem in aliqua planitie tangit nec ita totum vaporem aequaliter circumstat cum stellulae gignuntur, ut cum grumi cadunt.*

Cur figura potissimum sexangula.

Cur autem sexangula? An quia ex regularibus haec prima est vere plana, et quae in nullum corpus secum colligatur? Nam trigonus tetragonus pentagonus corpora efficiunt. An quia sexangulum sternit planitiem, excluso vacuo? At idem facit triangulum quadrangulum? An quia proxima haec circulo ex iis quae planitiem sternunt, excluso vacuo. An hoc discriminis inter facultatem sterilia figurantem, et alteram illam, quae fecunda figurat, ut illa triangula vel sexangula faciat, haec quinquangula? An denique ipsa huius formatricis natura in intimo sinu suae essentiae particeps est sexanguli?

Testo originale in inglese

For as I write it has again begun to snow, and more thickly than a moment ago. I have been busily examining the little flakes. Well, they have been falling, all of them, in radial pattern, but of two kinds: some very small with prongs inserted all the way round, indefinite in number, but of simple shapes without plumes or stripes, and very fine, but gathered at the centre into a slightly bigger globule. These formed the majority. But scattered among them were the rarer six-cornered starlets of the second kind, and not one of them was anything but flat, whether it was floating or coming to earth, with the plumes set in the same plane as their stem. Furthermore, under the flake a seventh prong inclined downwards like a root, and, as they fell, they rested on it and were held up by it for some time. This had not escaped me above, but I took it in a mistaken sense as though the three diameters were not in the same plane. So what I have said hitherto, no less than what I have had my say about, is as little removed from Nothing as may be.

At last the starred shape of the snowflake is taken *seriously*.

The first, lumpy, kind is formed, I think, from vapour that has almost lost its heat and is on the point of condensing into watery drops. So they are round, and no beautiful shape comes their way either, abandoned as they are by the master builder [heat], and they stretch out radially in all directions on the principles that were applied above to the examination of hoar-frost formations on windows.

But in the second kind, that is, of starlets, observation of cube or octahedron has no place. There is no contact of drops, since they settle as flat objects and not, as I thought above, with three diameters crossed.

So, although here too the formative soul maintains its place and remains in play as a cause,[27] the question of the choice of shape must be taken up again. First, why flat? Is it because I was wrong to remove, as I did, plane surfaces from among the builders of bodies? There is, after all, in all flowers a flat pentagon, not a solid dodecahedron. If so, the cause of flatness would really be this: that cold touches warm vapour on a plane and does not surround all the vapour uniformly when starlets are produced as it does when it falls in lumps.

Next, why six-cornered? Is it because this is the first of the regular figures to be essentially flat, incapable, that is, of combining with itself to form a solid body? For triangle, square, pentagon, all form bodies. Is it because the hexagon lays a flat surface without a gap? But triangle and square do the same. Or because the hexagon comes nearest to the circle of those figures which lay a flat surface without a gap? Or does this make the difference between a faculty that builds sterile shapes, triangles, and hexagons, and that second faculty that builds fruitful shapes, pentagons? Or, finally, does the nature of this formative faculty partake of six-corneredness in the inmost recess of its being?

Why the six-cornered shape is preferred.

Traduzione in italiano

Mentre scrivo ha ricominciato a nevicare, e in modo più fitto di un attimo fa. Ho esaminato alacremente i piccoli fiocchi di neve. Ora, sono caduti, tutti, secondo un modello radiale, ma di due tipi: alcuni molto piccoli con rebbi inseriti tutti attorno, in numero indefinito, ma di forme semplici senza pennacchi o strisce, e molto sottili, ma riuniti al centro in un globulo leggermente più grande. Questi sono la maggioranza. Ma sparsi tra essi c'erano, più rare, delle stelline a sei punte del secondo tipo, e ciascuna di esse era nient'altro che piatta, sia che stesse fluttuando sia che stesse cadendo a terra, con i pennacchi posti sullo stesso piano del loro stelo. Inoltre, sotto il fiocco un ***settimo polo*** *inclinato verso il basso come una radice, e, cadendo, restavano su di esso ed erano tenuti su così per qualche tempo. Ciò non mi era sfuggito prima, ma l'ho interpretato in un senso sbagliato come se i tre diametri non fossero sullo stesso piano.* ***Quindi quello che ho detto finora, non meno di quello su cui ho detto la mia, è poco meno lontano dal Niente quanto potrebbe essere****.*

Il primo tipo, grumoso, si forma – penso – dal vapore che ha quasi perso il suo calore ed è sul punto di condensare in goccioline acquose. Così esse sono tonde, e non si presentano nemmeno delle belle forme, abbandonate come sono del loro mastro costruttore [il calore]*, e si estendono radialmente in tutte le direzioni in base ai principi che erano stati sopra applicati all'esame delle formazioni di brina sulle finestre.*

Ma nel secondo tipo, che è quello delle stelline, non si osserva un cubo o un ottaedro. Non c'è contatto di goccioline, poiché si depositano come oggetti piatti e non, come pensavo prima, con tre diametri incrociati.

Così, sebbene anche qui l'anima formatrice mantenga il suo posto e rimanga in gioco come causa, la questione della scelta della forma deve essere ripresa. Primo, perché piatta? È perché mi sono sbagliato a togliere, come ho fatto, le superfici piane dai costruttori dei corpi? C'è, dopotutto, un pentagono piano in tutti i fiori, non un dodecaedro solido. Se fosse così, la causa della piattezza sarebbe davvero questa: che il freddo entra in contatto con il vapore caldo in un piano e non circonda tutto il vapore uniformemente quando si producono le stelline come fa quando cade in grumi.

Poi, perché a sei punte? È perché ***è la prima delle figure regolari a essere essenzialmente piatta****, cioè incapace di combinarsi con se stessa per formare un corpo solido? Nel caso di triangolo, quadrato, pentagono, tutti formano corpi. È perché l'esagono* ***giace su una superficie piana senza lasciare un buco****? O questa è la differenza tra la facoltà di produrre forme sterili, i triangoli e gli esagoni, e la seconda facoltà che costruisce forme fruttuose, i pentagoni? O, infine, la natura di questa facoltà formatrice prende parte all'essere a sei angoli nel più intimo recesso del suo essere?*

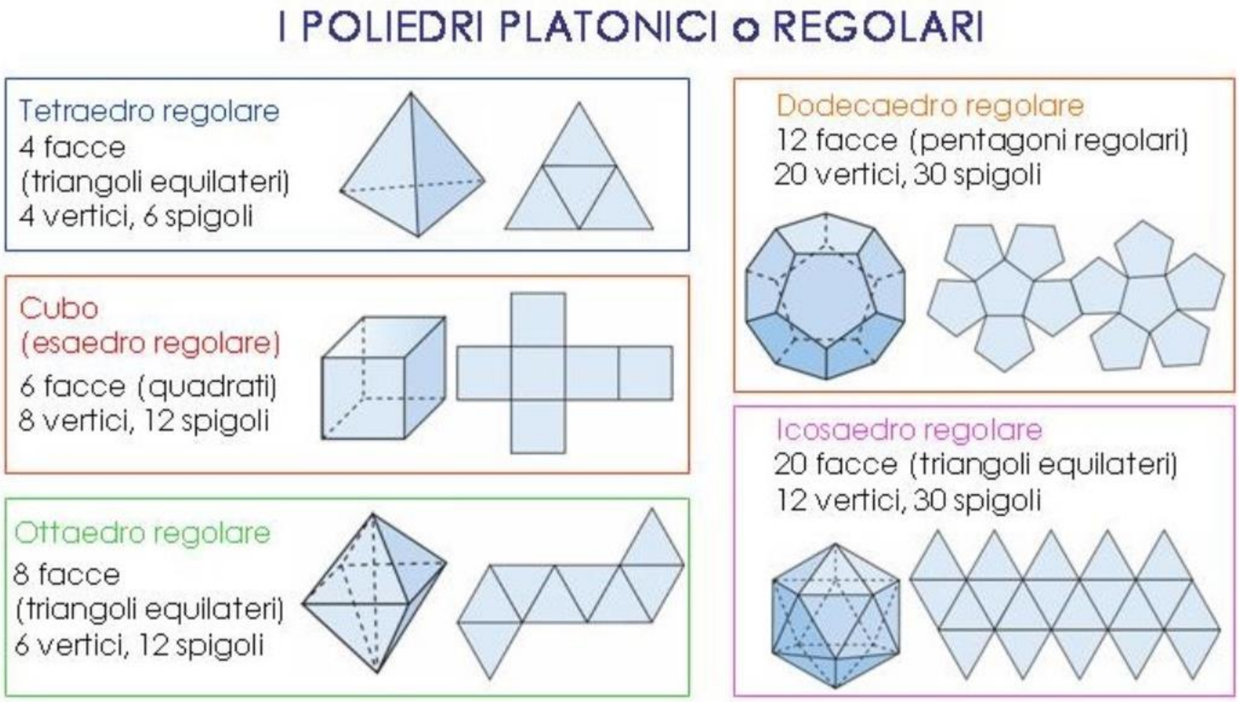
Domande

1. Kepler osserva la neve: quali sono le possibili forme per i fiocchi di neve da lui individuate?
2. L'autore osserva un *"settimo polo"* all'interno della seconda tipologia di fiocchi di neve: qual è la sua funzione?
3. Tenendo presente l'introduzione del trattato *Strena seu de nive sexangula*, prova a spiegare il significato della frase: "Quindi quello che ho detto finora, non meno di quello su cui ho detto la mia, è poco meno lontano dal Niente quanto potrebbe essere".
4. Secondo Kepler, quando si forma il primo tipo di cristalli di neve (quello *"grumoso"*)? Da quale esperienza concreta ha tratto questa conclusione?
5. Qual è stato il cambiamento di idea dell'autore a proposito dei fiocchi di neve a forma di "stellina"?
6. Una prima domanda che si pone Kepler riguarda la piattezza dei fiocchi di neve. Quale causa ipotizza l'autore?

Approfondimento: i poliedri regolari

Riferendosi all'esagono, Kepler scrive: "è la prima delle figure regolari a essere essenzialmente piatta, cioè incapace di combinarsi con se stessa per formare un corpo solido? Nel caso di triangolo, quadrato, pentagono, tutti formano corpi."

Kepler si sta riferendo qui a particolari "corpi solidi", i cosiddetti **solidi platonici** o **poliedri regolari**. Cosa sono?
Un poliedro è detto regolare quando tutte le sue facce sono poligoni regolari tra loro congruenti e in ogni vertice insiste lo stesso numero di spigoli.
Gli antichi greci avevano già scoperto che i poliedri regolari sono solo i cinque seguenti:



Da "Lezioni di Matematica", Materiali per la LIM, Edizioni Scolastiche Bruno Mondadori, Pearson Italia, SpA.

Tre di questi (tetraedro, ottaedro e icosaedro) hanno come facce dei ________________ equilateri. Il cubo (o esaedro) ha sei facce ______________; mentre l'ultimo, il dodecaedro, ha 12 facce costituite da _________________ regolari.
Cosa significa, quindi, la frase di Kepler: "Nel caso di triangolo, quadrato, pentagono, tutti formano corpi"? ____
____
____
____

Kepler afferma, inoltre, che l'esagono è "la prima delle figure regolari a essere essenzialmente piatta, cioè incapace di combinarsi con se stessa per formare un corpo solido". Questo, in pratica, significa che **non esiste un poliedro regolare** avente come **facce** degli **esagoni regolari** congruenti.

Perchè?

In ogni poliedro la parte di spazio compresa tra gli angoli delle facce che hanno un vertice in comune è detta **angoloide**. L'angoloide è formato da almeno ______ facce, perché altrimenti non si chiude. Inoltre, la somma degli angoli con il vertice in comune deve essere minore di _______° per evitare che l’angoloide “diventi piatto”.[1] Naturalmente, trattandosi di un poliedro regolare, gli angoloidi sono tutti congruenti. Supponiamo che le facce del poliedro regolare siano triangoli equilateri: l’ampiezza dell'angolo di una faccia è di _____°. Allora:

- con tre facce per vertice (3 x _____° = _____°) si ottiene un tetraedro,
- con quattro facce per vertice (4 x _____° = _____°) si ottiene un ottaedro,
- con cinque facce per vertice (3 x _____° = _____°) si ottiene un icosaedro.

Perché, nel caso dei triangoli equilateri, non si possono avere sei facce per vertice? _______________
____
____

Abbiamo così esaurito i poliedri regolari a facce triangolari. Passiamo quindi al caso in cui le facce sono dei quadrati: con tre facce per vertice (3 x _____° = _____°) si ottiene __________________ .
Se avessimo quattro facce quadrate, l’angoloide misurerebbe 4 x _____° = _____°.
Esiste un poliedro regolare siffatto? Perché? ____
____

Se la faccia è un pentagono regolare, nel caso di tre facce per vertice (3 x 108° = _____°) si ottiene ____________________ . Se avessimo quattro facce pentagonali, invece, l’angoloide misurerebbe 4 x 108° = _____°. È possibile? Perché? ____
____

Infine, se la faccia è un esagono regolare, 3 x 120° = _____°. Esiste? _________________________
Quanti sono i poliedri regolari che abbiamo ottenuto? ____________________________
Perché, allora, non possono esistere poliedri regolari delimitati da poligoni regolari con sei (o più) lati? ____
____
____

In sintesi, si possono avere solo le combinazioni illustrate in figura: tre triangoli equilateri; quattro triangoli equilateri; cinque triangoli equilateri; tre quadrati; tre pentagoni regolari.

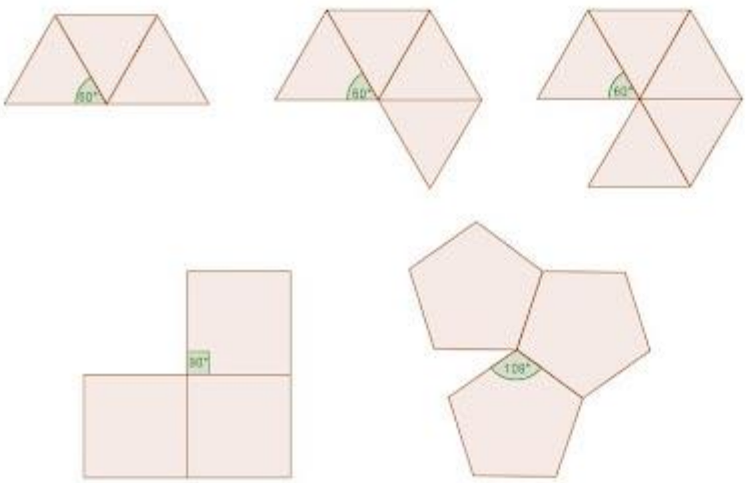


Immagine tratta dal sito web https://abordodelbeagle.blogspot.com/2010/03/perche-i-poliedri-regolari-sono-solo.html

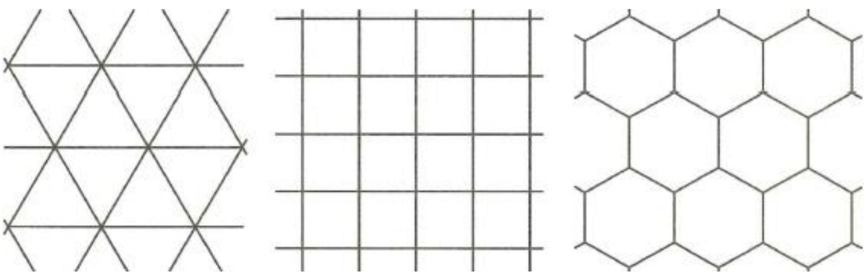
[1] Se, infatti, la somma degli angoli fosse maggiore o uguale a 360°, l'angoloide “si schiaccerebbe” sul piano o addirittura si “ribalterebbe” come un ombrello.

Approfondimento: la tassellazione del piano

Kepler aggiunge poi che l'esagono "giace su una superficie piana senza lasciare un buco".
La proprietà di "giacere sul piano senza lasciare un buco" corrisponde, in matematica, a "tassellare".
Una **tassellazione piana regolare** è infatti un ricoprimento del piano ottenuto con figure congruenti, ripetute all'infinito, senza sovrapposizioni. Questo concetto corrisponde all'idea intuitiva di pavimentazione con piastrelle identiche tra loro, cioè ricoprimento di una superficie attraverso figure piane congruenti che né lascino "vuoti" né abbiano sovrapposizioni.

1. Utilizzando le figure piane di cartoncino a disposizione, prova a costruire una pavimentazione con tutti i triangoli equilateri, una con i quadrati, una con gli esagoni e una con i pentagoni. In quali casi si riesce a fare e in quali no?____
   ____
2. Proviamo a capire come mai alcuni poligoni regolari tassellano il piano e altri no, osservando le pavimentazioni appena costruite. Intorno a un vertice tutti gli angoli devono essere tra loro ______________ e la loro somma deve essere pari ad un angolo giro, ovvero a _______°.
   Qual è la caratteristica degli angoli interni dei poligoni regolari che tassellano il piano?
   ____
   ____
   ____
   Infatti:
   - un triangolo equilatero ha gli angoli di _______°, che è un sottomultiplo di 360°. Intorno a ogni vertice della tassellazione triangolare, ci sono ________ triangoli equilateri, poiché 360°:____°=______;
   - allo stesso modo, poiché il quadrato ha gli angoli interni di _______°, che è un divisore di 360°, attorno a ogni vertice della tassellazione quadrata, vi sono _______ quadrati, poiché 360°:____°=______;
   - infine, gli angoli interni dell'esagono regolare misurano ______°, che è ________________ di 360°, per cui intorno a ogni vertice della tassellazione abbiamo ________ esagoni regolari.

   Gli angoli interni del pentagono regolare, invece, misurano 108°. Dividendo 360° per 108° si ottiene _______ quindi ____
   ____
3. Le uniche tassellazioni piane regolari composte da poligoni regolari sono le tre seguenti.



Motiva questa affermazione, cercando eventualmente le ampiezze degli angoli interni dei poligoni regolari con più di sei lati. ____
____
____
____

Approfondimento: pentagoni ed esagoni in natura

Quali sono le forme geometriche “sterili” e quelle “fruttuose” secondo Kepler? ________________
____

Nel brano della *Strena* analizzato, Kepler fa esplicito riferimento ad un elemento naturale del mondo dei viventi caratterizzato da una particolare forma geometrica. Qual è? _____________________
Sottolinea la frase nel testo.

Cerca ed elenca qui sotto alcuni esempi di esseri viventi (vegetali e animali) in cui si trova la forma geometrica citata da Kepler.

1. ________________________________
2. ________________________________
3. ________________________________
4. ________________________________
5. ________________________________
6. ________________________________
7. ________________________________
8. ________________________________
9. …

Kepler, tuttavia, non considera che in natura vi sono alcune “forme feconde” – nel suo linguaggio – caratterizzate invece da una geometria esagonale: ad esempio, il giglio (vedi figura a lato) è un fiore a sei petali e non è sterile.
Cerca altri contro-esempi all’affermazione di Kepler, individuando ulteriori esseri viventi a simmetria esagonale.

____
____
____
____
____
____

Conclusioni: la “vera causa” della simmetria esagonale dei fiocchi di neve

Le cinque “cause” individuate da Kepler sono in realtà errate e lo stesso autore non è pienamente convinto delle ragioni riportate. La seconda e la terza causa possono essere facilmente ritrattate e accorpate alla prima in quanto i fiocchi di neve sono di forme e grandezze differenti. Questo suggerisce che non esiste una sola superficie piatta di vapore che condensa simultaneamente in tutti i fiocchi di neve ma che ci sono tanti strati di vapore che agiscono separatamente, in tempi diversi. Il problema di «ricoprire» (cioè di tassellare) lo spazio non deve quindi essere preso in considerazione, in quanto potrebbe essere tenuto in conto solo nel caso di esagoni congruenti, ma così non è. Anche la quarta causa va ritrattata poiché esistono dei casi di simmetria esagonale anche nel mondo vivente: come abbiamo visto, il giglio è un fiore a sei petali e non è sterile. Per quanto riguarda la quinta causa, Kepler porta l’esempio delle forme dei cristalli, provenienti dalle miniere. Tuttavia, i minerali si presentano in un’infinità di forme.
Ci sono voluti più di 300 anni per ottenere una risposta soddisfacente all’interrogativo di Kepler sulla forma dei fiocchi di neve: questa, infatti, dipende dalla struttura atomica della materia, all’epoca di Kepler del tutto sconosciuta. La simmetria esagonale dei cristalli di neve è infatti una manifestazione macroscopica della disposizione interna degli atomi nel ghiaccio. Soltanto grazie ai raggi X è stato possibile vedere che le molecole di ghiaccio si dispongono in un reticolo che ha una struttura simmetrica esagonale (vedi figura). In sintesi, l’origine della forma esagonale dei cristalli di neve risiede nella formula chimica della molecola dell’acqua H_2O e nella sua particolare natura.